

数据结构杂题选讲

杨明天

浙江省镇海中学

2018 年 12 月 30 日



简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

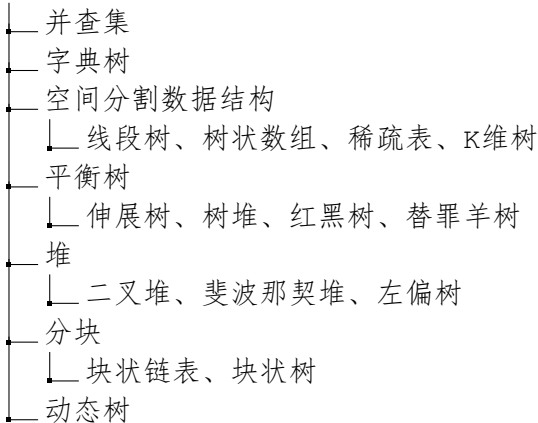
分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

高级数据结构



简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

由于其中的一些数据结构并不常用，因此本节课会选择性略过一部分数据结构。

友だちをつくろう

题目大意

一个 n 个点， m 条边的有向图。对于两个点 i, j ，若存在点 k ，使得存在边 $k \rightarrow i$ 和边 $k \rightarrow j$ ，则新增边 $i \rightarrow j$ 和 $j \rightarrow i$ 。不断进行上述操作，直至无边可加为止。问最终能有几条边。

$$n \leq 10^5; m \leq 2 \times 10^5$$

题目来源

JOISC 2014

友だちをつくろう

Solution

用并查集维护所有的完全图。
BFS将剩下能连的边连上。

DZY Loves Planting

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

题目大意

给出一个 n 个点的带边权的树。

定义 $g(x, y)$ 为 x, y 两点路径上权值最大边的权值，并且如果 $x = y$ 则 $g(x, y) = 0$ 。

对于长度为 n 的序列 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} (1 \leq p_i \leq n)$ ，定义 $f(P) = \min_{i=1}^n g(i, p_i)$ 。

如果一个序列 P 是合法的，当且仅当元素 j 在序列 P 中出现的次数不超过 x_j 次。

求所有合法的序列 P 中， $f(P)$ 的最大值。

$n \leq 10^5$

题目来源

Codeforces Round #254 (Div. 1) E

DZY Loves Planting

Solution

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

将边权从小到大排序，依次合并每条边连接的两个连通块。

$$\text{记 } sum = \sum_{i=1}^n x_i。$$

如果对于合并后的连通块 S ， $sum - \sum_{x \in S} x < |S|$ ，则比当前边更大的边已经不能够让当前块内的点全部连出去了，已经不可能作为答案。答案即为当前边的权值。

Rotacje na drzewie

题目大意

一棵有 n 个叶子结点的二叉树，每个叶子结点有一个权值，恰好是 $1 \sim n$ 的一个排列，你可以任意交换每个结点的两个子树，使得从左往右的权值序列中，逆序对数量最少，求最少逆序对数。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

题目来源

POI 2010/2011 Stage 2

Rotacje na drzewie

Solution

两个区间 A, B 合并的贡献，就是满足 $A_i > B_j$ 的 (i, j) 的对数。

我们有一个显而易见的贪心策略：对于每一个区间，需要尽可能使得其内部的逆序对数最小。若交换两个子树以后，能使得其逆序对数更小，那么就交换这两个子树。

计算逆序对数可以用值域线段树的合并来实现。

时空复杂度均为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Pandaria

题目大意

给你一个 n 个点， m 条边的无向图，每个点有一个颜色 c_i ，每条边有一个边权 w_i 。 q 组询问 (x, w) ，每次询问从点 x 出发，只经过边权不超过 k 的边所能到达的连通块中，出现次数最多的颜色中，编号最小的颜色是多少？

强制在线。

$$n \leq 10^5; m, q \leq 2 \times 10^5$$

题目来源

2016 ACM-ICPC China-Final G

Pandaria

Solution

考虑Kruskal重构树的性质：一个子树恰好是边权小于某个数时，能构成的连通块。

对于一个连通块，显然我们可以用一个值域线段树来维护子树内的信息——最大值及最大值对应的最小的编号。

对于每个询问，倍增到 x 最高的，经过边权不超过 k 的祖先。在对应的线段树内询问即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Souvenirs

题目大意

给定一个长度为 n 的数列 $A_{1\sim n}$ ， m 次询问，每次询问区间 $[l, r]$ 内两个不相等的数之差的最小值。

$$n \leq 2 \times 10^5; m \leq 3 \times 10^5$$

题目来源

Codeforces Round #397 F

Souvenirs

Solution

将所有询问离线，按右端点排序。

枚举右端点 r ，用线段树维护对于当前的右端点，每个左端点对应的答案。

线段树每个结点维护对应区间归并排序后的状态，即构造一棵归并树。

插入新的右端点就相当于在线段树对应区间找到最接近的数，然后更新答案。

显然暴力更新的复杂度在最坏情况下是单次 $\mathcal{O}(n)$ 的。

发现由于右端点固定，若左边的答案已经不会比右边优，则左端点已经没有更新的必要。先更新右子区间，再更新左子区间剪枝即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(m \log^2 n)$ 。

星际穿越

题目大意

有一排编号为 $1 \sim n$ 的 n 个点，第 i 个点与 $[l_i, i - 1]$ 之间所有点有双向边。 q 次询问，每次对于 l_i, r_i, x_i ，求 $\frac{\sum_{y=l_i}^{r_i} \text{dist}(x_i, y)}{r_i - l_i + 1}$ 。
 $n, q \leq 3 \times 10^5$

题目来源

PKUSC 2018

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

首先可以得到一个基本结论，从 x_i 出发到 y 的最短路中，一定存在至少一种，满足路径上有且仅有第一步是向右走的，或者直接往左走。

那么，我们不妨对于每一个点 x ，求出 x 右侧 l_i 最小的 $i = \min[x]$ ，此时 i 的覆盖范围一定包含了 x 。让 x 向 i 连边就得到了一个树形结构。在树上每个结点建立主席树维护原图每个点到树上对应结点的距离。

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

询问时对于 l_i, r_i, x_i ，若区间 $[l_i, r_i]$ 内的结点都与 x_i 有连边，则答案就是 $r_i - l_i + 1$ 。

否则那些在 x_i 连边范围外的那些点到 x_i 的距离，就是主席树上到 $\min[x_i]$ 的距离+1。

到 $\min[x_i]$ 的距离可以主席树上询问，剩下的+1一并计算到 $r_i - l_i + 1$ 中即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Rotacje na drzewie 2

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

题目大意

一棵有 n 个叶子结点的二叉树，每个叶子结点有一个权值，恰好是 $1 \sim n$ 的一个排列，你可以任意交换每个结点的两个子树，使得从左往右的权值序列中，逆序对数量最少，求最少逆序对数。

$$n \leq 10^6$$

空间限制128MB

题目来源

POI 2010/2011 Stage 2

Rotacje na drzewie 2

Solution

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

显然，用前面讲的线段树合并的做法会MLE。
同样还是前面的贪心策略，我们可以用平衡树的按秩合并来实现。

每次选取左右子树中较小的一棵，枚举每一个元素，查询在另一棵子树中有多少比它大/小的元素。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ ，空间复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

题目大意

给定一棵 n 个结点的有根树，每个点有代价 c_i 和权值 l_i 。
选定一个结点 k ，并在对应的子树中选取一个点集 S 。在满足 $\sum_{i \in S} c_i \leq m$ 的情况下，最大化 $|S| \cdot l_k$ 。
 $n \leq 10^5; m, l_i \leq 10^9$

题目来源

APIO 2012

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

如果确定了一个根结点 k ，那么我们的问题就转化成在 m 的限制内，取最多的结点。

对于每个结点，如果我们知道它的子结点的最优的满足 m 的限制的若干结点，那么可以证明合并之后的所有最优结点肯定都只会来自于子结点的最优结点。

所以我们用可并堆，对于每个子树对应的点集，弹掉最大的若干个结点,使其符合限制，然后尝试更新答案。

合并子树得到父结点对应子树的情况。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Chef and Churu

题目大意

一个长度为 n 的数列 $A_{1\sim n}$ ，另有 n 个函数，第 i 个函数会返回数组中标号在 $l_i \sim r_i$ 之间的元素的和。 q 次询问，询问包含以下两种：

- 将数组的第 x 个元素修改为 y ;
- 询问标号在 x 和 y 之间的函数的值的和。

$$n, q \leq 10^5$$

题目来源

Codechef November Challenge 2014 FNCS

Chef and Churu

Solution

对函数分块，记录数列中每个元素在每个块出现次数。
整块的部分可以通过前面的出现次数来维护，块外的部分用树状数组维护。
时间复杂度 $\mathcal{O}(n\sqrt{n} \log n)$ 。

XOR Minimization

题目大意

长度为 n 的数列 $A_{1\sim n}$ 。 q 次操作，操作包含以下两种：

- 询问 $A_{l\sim r}$ 中最小值及其出现次数；
- 将 $A_{l\sim r}$ 中每个数字异或上 k 。

$$n \leq 250,000; q \leq 50,000; 0 \leq A_i, k < 2^{16}$$

题目来源

Codechef March Cook-Off 2014 MINXOR

XOR Minimization

Solution

简介

并查集

友だちをつくろう

DZY Loves Planting

线段树

Rotacje na drzewie

Pandaria

Souvenirs

星际穿越

平衡树

Rotacje na drzewie 2

可并堆

派遣

分块

Chef and Churu

XOR Minimization

Thanks

分块，对每一块分别建一棵字典树。

对于整块的修改，可以打懒人标。剩余部分暴力重构对应的字典树。

对于整块的询问，相当于在字典树中查找异或上懒人标后最小的数，这是字典树的一个经典应用。剩余部分直接异或懒人标并取最小值即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(16q\sqrt{n})$ 。

Thanks

谢谢大家